Одређени интеграл - наставак

1. Нека је ф-ја f интеграбилна по Риману на сегменту $[-a,a]$, $a>0$.

   а) Ако је f парна функција, доказати да је
   $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

   б) Ако је f непарна функција, доказати да је
   $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

а) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = *$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\lceil \begin{array}{l} -x = t \\ -dx = dt \\ x = -t \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline t & a & 0 \end{array} \right\rfloor = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \rfloor$$

$$* = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

б) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = *$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\lceil \begin{array}{l} -x = t \\ x = -t \\ dx = -dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline t & a & 0 \end{array} \right\rfloor = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{a}^{0} f(t)\,dt =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \rfloor$$

$$* = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$$

2. Нека је f непрекидна функција на $[a,b]$. Доказати да је $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ акко је $\forall x\in[a,b], f(x)=0$.

$\Leftarrow$ Нека је $\forall x\in[a,b], f(x)=0$.

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b 0^2 dx = 0$$

$\Rightarrow$ Нека је $\int_a^b f^2(x)dx$. Треба доказати да је $\forall x\in[a,b], f(x)=0$.

Претпоставимо супротно, тј. да $\exists x_0\in[a,b]$ $f(x_0)=k\neq 0$.

Тада је $f^2(x_0)=k^2>0$. Како је f непрекидна функција на $[a,b]$, то је и f^2 непрекидна функција на $[a,b]$, па је $f^2(x)$ непрекидна у x_0. Дакле,

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon) \ \forall x \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Узмимо $\varepsilon=k^2$, па $\exists \delta=\delta(k^2)$ $\forall x\in[a,b]$ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<k^2$

односно

$$\forall x \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b] \Rightarrow f(x)\in(\overset{=k^2}{f(x_0)}-k^2, \overset{=k^2}{f(x_0)}+k^2)$$

тј.

$$\forall x \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b] \Rightarrow f(x)\in(0, 2k^2)$$

Означимо $\quad (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b] = \langle\alpha,\beta\rangle \in [a,b]$

Важи: $\forall x\in\langle\alpha,\beta\rangle$ $f(x)>0$, па је

$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx > \int_\alpha^\beta 0dx = 0$, што је у супротности са нашим условом $\int_a^b f^2(x)dx=0$. Дакле, наша претпоставка није тачна, па је $\forall x\in[a,b]$ $f(x)=0$.

3. Нека је $f \in C([a,b])$ доказати да $\exists c \in [a,b]$ такво да важи
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

$f \in C([a,b]) \Rightarrow \exists m, M$ т.д. $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Важи
$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

односно
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Дакле, важи
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Како је f непрекидна на $[a,b]$, то за $\forall y \in [m,M]\ \exists c \in [a,b]\ f(c) = y$, па за $y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ $\exists c \in [a,b]$ т.д. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Нека је F примитивна ф-ја ф-је f на $\mathbb{R}$, и $g, h \in D(\mathbb{R})$

Тада је
$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x)dx = F(h(x)) - F(g(x))$$

па је
$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x)dx\right)' = \left(F(h(x))' - F(g(x))\right)' = F'(h(x))\cdot h'(x) - F'(g(x))g'(x) =$$
$$= f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$

4. Израчунати

а) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x \cos t^2\,dt\right)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{1} = 0$$

б) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2\right)'}{\left(\int_0^x e^{2t^2}dt\right)'} =$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot \cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{2x^2}}\, e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \frac{2\cdot 0}{1} = 0$$

5. Доказати да је $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$, $x\to+\infty$

Треба доказати да је $\int_0^x e^{t^2}dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$, $x\to+\infty$,

односно да је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2}\left(\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}\right)}{\cancel{2}xe^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^{x^2}}(2+2x^2)}{\cancel{e^{x^2}}(1+2x^2)} = 1$$

6. a) Ако је $f\in C([0,1])$, доказати да је $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

б) Ако је $f\in C([0,1])$, доказати да је $\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

в) Ако је $f\in C([a,b])$, доказати да је $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)=0$

г) Ако је $f\in C([a,b])$, доказати да је $\frac{d}{da}\left(\int\limits_a^b tg^2 x\,dx\right)=-tg^2 a$

a) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x=t \\ -dx=dt \\ dx=-dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

б), в), г) - сама

7. Израчунати

a) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\sin^{n-1}x & d\vartheta=\sin x\,dx \\ d\vartheta=(n-1)(\sin^{n-2}x)\cos x\,dx & \vartheta=-\cos x \end{array}\right| =$$

$n\in N$

$$= \underbrace{-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

Означимо $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Добијамо

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,I_{n-4}=\dots$$

Нађимо I_2 и I_1

$$I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Дакле, за n - парно је $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{4}$

а за n - непарно је $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot 1$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$ — сами

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$, $m,n\in\mathbb{N}$

8. Израчунати
$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx, \quad m,n\in\mathbb{N}$$

$f(x) = x^m (\ln x)^n$, $D_f = (0, +\infty)$

Очигледно, f није дефинисана на $[0,1]$, јер није дефинисана у 0. Међутим, како је
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Додефинишимо ф-ју f у нули са $f(0)=0$.

Дакле:
$$f(x) = \begin{cases} x^m(\ln x)^n, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

и $f\in C([0,1])$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \left[\begin{array}{l} u=(\ln x)^n, \quad dv = x^m\,dx \\ du = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}dx, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{x}\Big|_\varepsilon^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m}(\ln x)^{n-1}\,dx =$$

$$= -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx$$

Означимо $I_n = \int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx$

Добијамо $I_n = -\frac{n}{m+1}I_{n-1} = -\frac{n}{m+1}\left(-\frac{(n-1)}{m+1}I_{n-2}\right) = \ldots =$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\underbrace{\int_0^1 x^m dx}_{=I_0} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1\right) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

Теореме о средњим вриједностима интегралног рачуна

I теорема о средњим вриједностима интегралног рачуна

Ако су $f, g \in R([a,b])$, $g(x) \geq 0$ (односно $g(x) \leq 0$) $\forall x \in [a,b]$, тада $\exists \mu \in [m, M]$, $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ такво да

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Ако је $f \in C([a,b])$, тада $\exists \xi \in [a,b]$ т.д.

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

II теорема о средњим вриједностима интегралног рачуна

Нека је f монотона на $[a,b]$, и $g \in R([a,b])$. Тада $\exists \xi \in [a,b]$ такво да је

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)\,dx$$

Ако је $f(x)$ опадајућа и ненегативна, тада $\exists \xi \in [a,b]$ т.д.

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)\,dx$$

Ако је $f(x)$ растућа и ненегативна, тада $\exists \xi \in [a,b]$ т.д.

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x)\,dx$$

1. Одредити знак интеграла

б) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x \, dx = \int_{-2}^{0} x^3 2^x \, dx + \int_{0}^{2} x^3 2^x \, dx = *$

$\int_{-2}^{0} x^3 2^x \, dx = \left. \begin{array}{l} f(x)=2^x, \ f\nearrow, \ f(x)>0 \ \forall x\in[-2,0] \\ g(x)=x^3 \end{array} \right\} \overset{\text{II т.}}{\Longrightarrow} \exists \xi_1 \in [-2,0] \text{ т.д. } =$

$= 2^{\xi_1} \int_{-2}^{0} x^3 \, dx = 2^{\xi_1} \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^{0} = -2^{\xi_1} \cdot 4$

$\int_{0}^{2} x^3 2^x \, dx = \left. \begin{array}{l} f(x)=2^x, \ f\nearrow, \ f(x)>0 \ \forall x\in[0,2] \\ g(x)=x^3 \end{array} \right\} \overset{\text{II т.}}{\Longrightarrow} \exists \xi_2 \in [0,2] \text{ т.д. } =$

$= 2^{\xi_2} \int_{0}^{2} x^3 \, dx = 2^{\xi_2} \left. \frac{x^4}{4} \right|_{0}^{2} = 2^{\xi_2} \cdot 4$

$* = -2^{\xi_1} \cdot 4 + 2^{\xi_2} \cdot 4 = 4\left(2^{\xi_2} - 2^{\xi_1}\right) > 0$ (јер је $\xi_2 \geq 0 \geq \xi_1$, $2^x \nearrow$)

Дакле $\int_{-2}^{2} x^3 2^x \, dx > 0$